CB-697

REPRESENTAÇÕES NUMÉRICAS: ESTRATÉGIAS DIDÁTICAS A PARTIR DE UMA CONFIGURAÇÃO FORMADA POR PROFESSORES E TECNOLOGIAS

Gerson Pastre de Oliveira
gpastre@pucsp.br
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP) – Brasil
Universidade Paulista (UNIP) – Brasil

Núcleo temático: Recursos para o ensino e aprendizagem das matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Formação e atualização docente
Palabras clave: Educação Matemática, representações numéricas, tecnologias digitais, teorema fundamental da aritmética

Resumo

O presente trabalho relata uma investigação qualitativa que teve como sujeitos um grupo de professores da educação básica pública, participantes de uma oficina cujos temas principais foram a primalidade de inteiros positivos e o teorema fundamental da aritmética (TFA), tópicos relevantes da teoria dos números, tratados sob diferentes perspectivas tecnológicas e analisados sob uma proposta teórica ligada aos conceitos de transparência e opacidade das representações numéricas e ao constructo seres-humanos-com-mídias. A sessão na qual aconteceram as interações foi composta por duas atividades: na primeira delas, os participantes deveriam indicar, a partir de uma representação específica, se determinado número inteiro positivo seria primo ou não; na segunda, os professores utilizaram uma aplicação tecnológica digital para determinar quais números de uma relação aleatória seriam primos. As análises indicaram que os participantes apresentaram dificuldades na mobilização do conhecimento relativo ao TFA, o que os levou a adotar estratégias de alto custo cognitivo e a cometer erros; da mesma forma, os dados indicaram que semelhantes percalços foram superados a partir da proposta didática planejada a partir de uma configuração de seres-humanos-com-tecnologias.

Introdução

Este trabalho descreve uma pesquisa que teve como participantes um grupo de professores do ensino básico de escolas públicas, envolvidos no projeto “Tecnologias e educação matemática: investigações sobre a fluência em dispositivos, ferramentas, artefatos e interfaces”, realizado na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo[26]. Nas atividades propostas, os docentes deveriam identificar se determinados números eram primos, em situações nas quais as regras de divisibilidade representavam uma estratégia pouco eficiente e

[26] Este projeto recebeu apoio financeiro do CNPq e está ligado ao grupo de pesquisa PEA-MAT (Processo de Ensino-Aprendizagem em Matemática) do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP.

ISBN 978-84-945722-3-4

que o conhecimento acerca do Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) seria importante. Por meio dos instrumentos utilizados, com distintas interfaces, procurou-se evidenciar as estratégias empregadas pelos sujeitos, suas concepções acerca da representação de números naturais e a influência do tipo de tecnologia na mobilização dos conhecimentos matemáticos, com base no tratamento teórico que segue.

Representações numéricas e o uso de tecnologias em Educação Matemática

Um dos conceitos centrais considerado nesta investigação se refere à transparência e à opacidade das representações numéricas. Neste sentido, o estudo de Zazkis e Liljedahl (2004) menciona o papel das representações no âmbito dos números naturais. Em seu trabalho, os autores discutiram os dados obtidos a partir de uma investigação também realizada com professores de ensino fundamental, com foco na compreensão dos mesmos acerca dos números primos, de modo a detectar os fatores que influenciam este entendimento. A argumentação empregada nas análises dos dados coletados é que a falta de transparência da representação dos números primos seria um obstáculo à sua compreensão. Esta ideia é apropriada a partir do trabalho de Lesh, Behr e Post (1987). Referindo-se à múltiplas representações dos números racionais, os autores indicam que as mesmas "incorporam" as estruturas matemáticas, no sentido de que as representam em termos materiais. Desta forma, os sistemas representacionais podem ser vistos como opacos ou transparentes: uma representação transparente teria nem mais, nem menos significado do que as ideias ou estruturas que representa, enquanto uma representação opaca enfatiza alguns aspectos das ideias ou estruturas e esconde outros. De posse de variadas possibilidades representacionais, caberia a uma estratégia didática, por exemplo, capitalizar os pontos fortes de um determinado sistema representacional e minimizar suas fraquezas. A partir da proposta de Lesh, Behr e Post (1987), Zazkis e Gadowsky (2001) introduzem a noção de transparência e opacidade relativas, focando as representações numéricas. As autoras sugerem, em seu trabalho, que todas as representações relativas aos números são opacas, justamente no sentido em que, de alguma forma, sempre escondem algumas características, embora possam revelar outras, em relação às quais podem ser transparentes. Este trabalho, então, apresenta resultados relativos às atividades que os sujeitos foram convidados a realizar, as quais envolviam questões relativas às representações numéricas e que foram propostas a partir de interfaces distintas, com o destaque para o emprego de tecnologias de variada natureza. Por isso, a perspectiva assumida nesta pesquisa procura compreender o uso de tecnologias na

ISBN 978-84-945722-3-4

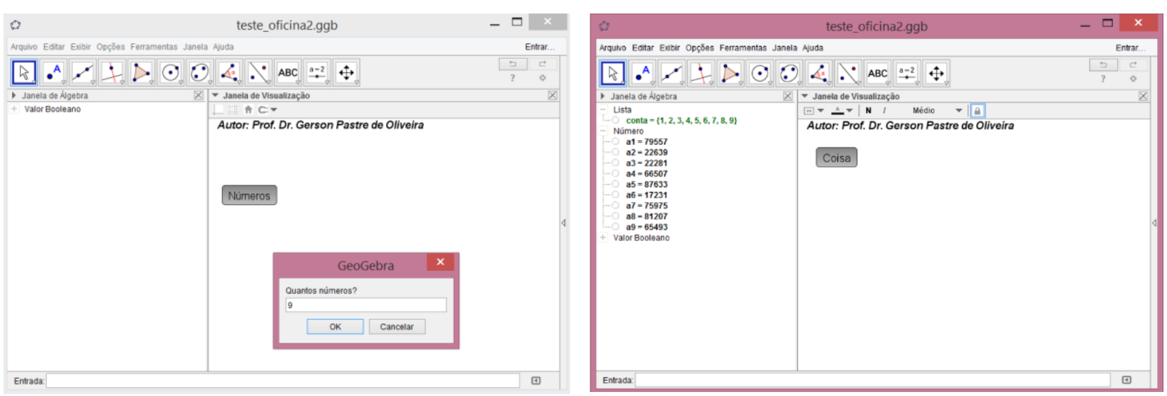
construção do conhecimento matemático sem dissociação em relação às pessoas que as empregam. Neste cenário, as tecnologias não devem ser vistas como substitutas das capacidades humanas, nem mesmo suplementando as mesmas. Como alternativa, Tikhomirov (1981) propõe que as tecnologias informáticas reorganizam o pensamento humano. O autor propugna que o uso de aplicações computacionais permite formas de mediação inusitadas, delegando ao computador o papel de ferramenta da atividade mental humana, detentor de funções semelhantes àquelas levadas à efeito pela linguagem na lógica vygotskiniana. Neste sentido, a aprendizagem em Matemática é um processo que envolve tecnologias de certa forma integradas às pessoas, o que permite que intencionalidades, estratégias, planejamentos e vontades entrem em jogo. Para Borba e Villarreal (2005), esta integração deve ser de tal ordem que exclua qualquer tentativa de enxergar pessoas e tecnologias como conjuntos separados. Para estes autores, o conhecimento matemático é constituído a partir de coletivos de seres-humanos-com-mídias, considerando que as mídias reorganizam o pensamento das pessoas e que a presença de distintas tecnologias condiciona a produção de diferentes formas de conhecimento. Assim, no trabalho que aqui se relata, as atividades descritas procuraram investigar a compreensão, por parte de um grupo de professores, de representações numéricas relativas aos números primos e ao TFA, tendo por base a mobilização destas pessoas-com-tecnologias em momentos distintos, com mídias diversas.

Aportes metodológicos

Os participantes desta investigação são oito professores do Ensino Básico de escolas públicas dos estados de São Paulo (seis) e do Pará (dois), todos voluntários de oficinas realizadas no âmbito do projeto de pesquisa já mencionado. A investigação, aqui descrita parcialmente, foi realizada na PUC/SP, em uma única sessão, com aproximadamente quatro horas de duração. Dentre os sujeitos assim descritos, cinco atuam no Ensino Fundamental e Médio e três apenas no Fundamental. Além disso, todos concluíram licenciatura em Matemática, sendo que três cursavam Mestrado Acadêmico em Educação Matemática e dois haviam concluído especializações em Educação Matemática. A pesquisa empregou 2 tipos de atividades envolvendo o conhecimento sobre primalidade no âmbito da Teoria dos Números. A primeira atividade trazia uma questão cujo enunciado era o seguinte: "*Considere F = 151 x 157. F é*

ISBN 978-84-945722-3-4

um número primo? Indique SIM ou NÃO e explique sua decisão" (Zazkis & Liljedahl, 2004). Para esta questão, os estudantes deveriam anotar, como resposta, a alternativa "Não", uma vez que a representação indicada, com características transparentes, indica que F é composto. Os estudantes poderiam recorrer ao TFA para concluírem que decomposição exibida é única. A segunda atividade foi realizada imediatamente em seguida da primeira: os oito professores tinham diante de si uma tela do Geogebra contendo apenas um botão cujo rótulo trazia a palavra "Números". Todos foram informados pelo pesquisador que a aplicação sortearia nove números e que os mesmos apareceriam na janela de álgebra do software. Os participantes da oficina deveriam indicar quais deles seriam primos e, neste meio tempo, não poderiam clicar no botão que trazia a palavra "Coisa" como rótulo (Figura 1). O código em *javascript* que efetivava o sorteio levou em conta a escolha aleatória entre números que, neste contexto, seriam "grandes" (ímpares entre 1001 e 99999), ou seja, do ponto de vista teórico, as representações providas pelo software seriam completamente opacas quanto à primalidade. O objetivo consistia em restringir a aplicação direta das regras de divisibilidade e de algoritmos de divisão pelos primeiros primos conhecidos, na maioria dos casos. Decorridos 20 minutos, os sujeitos eram convidados a clicar no botão "Coisa". Após esta ação, a janela de álgebra do Geogebra apresentava a decomposição de cada um dos 9 números em fatores primos, na forma de listas. O título do botão poderia ser, então, "Decompor em fatores primos", mas isto poderia indicar que os professores eram obrigados a adotar esta estratégia, o que comprometeria sua autonomia. Em seguida, os participantes eram convidados a rever suas respostas em função dos novos dados, obtidos com o Geogebra. O botão "Apagar Listas" poderia ser empregado para repetir a experiência inúmeras vezes.



ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 1. Aplicação do Geogebra para sortear números (desenvolvida pelo autor)

Análises

Logo no início da primeira atividade, *Prof2*, após tentar algumas operações de divisão com lápis e papel, afirmou que o número em questão seria "provavelmente" primo. Estratégias semelhantes foram usadas por outros quatro participantes, que também afirmaram, erroneamente, que o número em questão seria primo. Nestes casos, alguns erros típicos, já verificados em Zazkis e Liljedahl (2004), foram verificados (Quadro 1).

Prof3 faz inúmeras operações de divisão e termina afirmando que "23707 é primo, pois pode ser dividido por ele mesmo e por um". Desta forma, indica não perceber que este critério não distingue os números primos dos compostos.
Prof4, após diversas tentativas usando operações de divisão, concluiu que 23707 seria um número primo, pois "termina em 7, e 7 é primo".
Para *Prof5*, como os testes de divisibilidade por 2, 3, 5, 7, 11 e 13 "falharam", o número em questão seria primo – neste caso, o sujeito indica crer que "a decomposição em fatores primos significa, na verdade, a decomposição em fatores primos pequenos" (Zazkis & Campbell, 1996, p. 215).
Na visão de *Prof8*, 23707 "é primo, pois o número é ímpar, não é divisível por sua raiz quadrada e nem por nenhum outro primo". *Prof8* limitou os primos ao intervalo compreendido entre 2 e 13 e apresenta algumas confusões envolvendo os conceitos de números quadrados perfeitos e números ímpares.

Quadro 1. Erros típicos relacionados à determinação da primalidade de 23707

A representação de F provida no enunciado da questão possui características transparentes em relação à primalidade, já que apresenta o número por meio de sua decomposição única em fatores primos, da forma indicada por Zazkis e Liljedahl, (2004). Entretanto, os professores supramencionados não empregaram esta ideia, expressa no TFA, o que indica que a representação numérica que possua características matemáticas que a tornam transparentes pode permanecer opaca quando os conhecimentos relativos a elas não são mobilizados pelos indivíduos. Os mesmos autores, além de Lesh, Behr e Post (1987) e Zazkis e Gadowsky (2001), indicam que estratégias didáticas podem ser empregadas para a construção de evidências que venham a fortalecer as características transparentes de determinado sistema representacional. Os demais participantes indicaram corretamente que F, o número candidato, não seria primo. Para *Prof1*, "F é divisível por 151 e 157, o que faz com que não seja primo". Os participantes *Prof6* e *Prof7* indicaram, de modo semelhante, que F possuía outros divisores além dele próprio e 1, o que o desqualificaria como número primo. Entretanto, nenhum dos três participantes que respondeu corretamente evidenciou o emprego do TFA em suas conjecturas: questionados sobre a possibilidade de F possuir outros divisores além dos mencionados, os três afirmaram que seria possível, mas que teriam que

ISBN 978-84-945722-3-4

testar os números até determinado limite (para *Prof1*, até a raiz quadrada do número; para *Prof6* e *Prof7*, até a metade do número). Em relação à segunda atividade, realizada no Geogebra, os participantes acessaram a aplicação que estava disponível nos computadores do laboratório da instituição e sortearam 9 números. A partir deste momento, os professores tiveram 20 minutos para indicar quais números seriam primos. A maioria dos participantes alegou que o tempo era curto e que os números eram grandes demais. O pesquisador indicou que os mesmos deveriam apresentar quantos resultados pudessem no tempo dado. Até este momento, o aspecto tecnológico no conjunto professores-com-Geogebra não exercia grande influência sobre a questão da transparência da representação numérica quanto à primalidade, pois a interface do programa em questão se limitou a fornecer números aleatórios. Assim, como os números sorteados eram potencialmente diferentes, a quantidade de resultados corretos ou errados variou entre os sujeitos. Aqueles que tiveram números sorteados em relação aos quais as regras de divisibilidade ou testes com fatores primos "pequenos" (entre 3 e 13) podiam ser aplicadas obtiveram maior número de acertos do que os colegas que tiveram sorteados números como 31753 (113 x 281). Após o final do tempo dado, o pesquisador passou a coordenar um debate com os participantes, cuja principal motivação foi a de levantar as conjecturas e estratégias que os sujeitos haviam proposto. Nenhum dos participantes indicou ter pensado em obter a fatoração dos números candidatos em primos, de modo a usar o TFA. Após a discussão, o pesquisador indicou que os sujeitos podiam clicar no botão "Coisa", que mostraria, para cada número sorteado, a respectiva lista de fatores primos componentes. Em seguida à ação de clicar no botão, os professores passaram a interpretar os dados disponíveis (Figura 2).

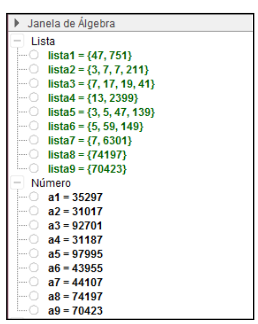


Figura 2. Janela de álgebra do Geogebra: números e respectivos fatores primos

ISBN 978-84-945722-3-4

Dispondo das listas fornecidas e dos números sorteados, os professores começaram a procurar relações entre os componentes mencionados (ver diálogos do Quadro 2):

Prof6: *– Professor, eu gostaria de rever minhas respostas.*	***Pesquisador:*** *– Sim, e por quê?*	***Prof6:*** *– Porque percebi algo que não havia visto antes... as listas... são fatores de cada número...*
Prof1: *– Multiplicando os números que estão nas listas, resulta os números sorteados, certinho!*	***Prof4:*** *– Verdade, mas tem casos em que aparece um número só... estes números são primos, pois só podemos multiplicar por um!*	***Prof1:*** *– Multiplicando os números que estão nas listas, resulta os números sorteados, certinho!*
Prof3: *[não parecendo convencido] – Professor, vou sortear os números de novo… [após repetir o sorteio e a fatoração] – Puxa, verdade! Os primos não têm fatores, só os compostos.*	***Prof4:*** *– Os fatores dos primos são ele mesmo e o um...*	***Prof7:*** *– Professor, estava pensando... No meu caso, um dos números é 88739... A fatoração aparece como 7, 7 e 1811. Podia escrever 49 e 1811, não?*
Prof8: *[depois de alguma discussão com os demais] – Acho que pode aparecer o 49, mas 49 não é primo, e as listas mostram os fatores primos dos números. A ideia é aparecer só os fatores primos.*	***Prof4:*** *– Tem razão. Qualquer número pode ser escrito como um produto de fatores primos! É isso! Nossa, a primeira questão era óbvia! Só tem uma decomposição em primos para cada número*	***Prof8:*** *– É o teorema fundamental da aritmética...*

Quadro 2. Diálogos envolvendo os sujeitos da pesquisa e o pesquisador

Após estas observações, os sujeitos apontaram quais números eram primos e quais não eram, repetindo os sorteios e todo o processo diversas vezes. Como apontam Borba e Villarreal (2005), a visualização e a experimentação foram fatores importantes na nova estratégia assumida pelos sujeitos a partir da configuração seres-humanos-com-Geogebra. Para estes autores, tais elementos podem permitir, entre outras ações, por exemplo, investir na criação de conjecturas acerca dos problemas em exame (e testá-las, por meio de inúmeros exemplos), trazer à tona resultados que não eram conhecidos antes dos experimentos e testar maneiras diversas de colher resultados. O acesso aos componentes visuais, na consolidação dos resultados das ações perpetradas pelas pessoas-com-Geogebra, constituiu uma forma de transformar a compreensão que detinham sobre os problemas em jogo. Outro elemento que não pode ser desconsiderado na configuração professores-com-Geogebra é o dinamismo das tecnologias digitais, aqui visto como a possibilidade de manipulação de parâmetros, atributos ou valores que serviram à constituição e/ou definição de um constructo matemático em contexto informatizado. Diante das possibilidades abertas por este recurso, um movimento investigativo fundamental em matemática encontra subsídios consistentes, qual seja o trabalho relacionado à elaboração, teste e validação (ou refutação) de conjecturas. Isto se viu amplamente no experimento aqui descrito, quando os professores investiram, por meio da experimentação e visualização, na repetição do processo, utilizando as regularidades observadas nas fatorações como meio para apoiar a reorganização das ideias acerca da primalidade dos números apresentados. Todos estes fatores colaboraram para que o conhecimento acerca do TFA fosse mobilizado na resolução do problema.

Considerações finais

Na discussão que se seguiu à última atividade, os participantes declararam que, na atividade 1, não haviam percebido que a "forma" como o número estava escrito (sua representação) permitia responder à pergunta diretamente, por meio do TFA. Após o transcurso das duas etapas do experimento, para os professores, o número F não seria primo porque podia ser, ele mesmo, representado em fatores primos. Em relação à atividade 2, os participantes indicaram que os números não estavam em uma "forma conveniente" (representação transparente), ou seja, eram "números grandes" que não estavam decompostos em fatores primos. Os sujeitos mencionaram ter gasto os 20 minutos para tentar indicar quais eram os primos, mas que, se dispusessem da representação adequada em fatores e se lembrassem do TFA, teriam feito de forma muito mais ágil. Esta última característica foi percebida por eles quando clicaram no segundo botão (Coisa), o que fez com que a decomposição dos números em fatores primos surgisse. Na conclusão dos participantes, quando existissem outros fatores que não apenas 1 e o próprio número (fatoração trivial), o número dado não seria primo. Os professores destacaram a importância do conhecimento do TFA e do uso do Geogebra no processo, indicando que esta seria uma boa forma de abordar o assunto em sala de aula. Neste caso, a configuração de pessoas-com-Geogebra concorreu de forma mais eficiente para direcionar o esforço de resolução do problema para uma trajetória cuja estratégia representava maior possibilidade de êxito. Os diálogos mostram as renegociações de significado, as reformulações conjecturais e elementos que indicam a reorganização do pensamento. O fato de os professores perceberem que havia lhes faltado recuperar os conceitos explicitados pelo TFA e de o fazerem espontaneamente após o uso da interface disponibilizada, parece indicar que o emprego de estratégias didáticas com recursos providos por tecnologias digitais pode ser um dos caminhos para o trabalho com temas desta natureza. Neste aspecto, a configuração constituída por professores-com-Geogebra pareceu decisiva para a construção de respostas corretas e para a mobilização do conhecimento matemático pertinente.

Referências bibliográficas

ISBN 978-84-945722-3-4

Borba, M. C, & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modelling, visualization and experimentation*. New York: Springer.

Lesh, R., Behr, M., & Post, T. (1987). Rational Number Relations and Proportions. In C. Janiver (Ed.). *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Tikhomirov, O. K. (1981). The psychological consequences of computerization. In Wertsch, J. V. (Ed.). *The concept of activity in soviet psychology* (pp. 256–278). New York: M. E. Sharpe.

Zazkis, R., & Campbell. S. R. (1996). Prime decomposition: Understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 207-218.

Zazkis, R., & Gadowsky, K. (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. In Cuoco, A. (Ed.). *NCTM 2001 Yearbook: The roles of representation in school mathematics* (pp. 41-52). Reston: NCTM.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2004). Understanding primes: The role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35, 164-186.

ISBN 978-84-945722-3-4